MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 4:
(Promyslete a sepište řešení aspoň tří z následujících příkladů.)

1. Dokažte (užitím matematické indukce) :

   a) Pro $n \geq 2$, $n \in N$ platí: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

   Nebo, chcete-li raději těžší příklad:

   b*) Ukažte užitím matematické indukce, že pro všechna přirozená n platí (e je Eulerovo číslo) :
   $$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

   (Návod : pro horní odhad lze užít tzv. AG nerovnost
   $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ (n přirozené, $x_1, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla)

   a dále, že platí pro n přirozené odhad $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.)

2. Je dáno zobrazení $f: A \to B$ a $M, M_i \subseteq A$, $N, N_i \subseteq B$, $(i = 1,2)$;
   označme $f(M) = \{b \in B; \exists a \in A: f(a) = b\}$ a $f^{-1}(N) = \{a \in A; f(a) \in N\}$.
   Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a pokud některé neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro která tvrzení platí:

   a) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$; b) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$;

   c) $\forall M \subseteq A: f^{-1}(f(M)) = M$; d) $\forall N \subseteq B: f(f^{-1}(N)) = N$.

3. Dokažte aspoň jedno z následujících tvrzení:

   a) Je-li $x \in R, x \neq 0$, pak opačný prvek $-x$ a inverzní prvek x^{-1} jsou určené jednoznačně ;

   b) $\forall x \in R$: $0..x = 0$; $-x = (-1).x$; $\forall x \in R: -(-x) = x$;

   c) $\forall x, y \in R$: $(-x).(-y) = x.y$;

   d) $0 < x \Rightarrow -x < 0$; $x < y \Rightarrow -x > -y$.

4. Najděte (v R) supremum, infimum, maximum, minimum (pokud existují) následujících množin (a vaše tvrzení ověřte) :

   a) $M_1 = \left\{1 - \frac{1}{n^2}; n \in N\right\}$; b) $M_2 = \left\{\frac{n-1}{n}; n \in N\right\}$; c) $M_3 = \{n^2 - m^2; m, n \in N, n > m\}$.

5. Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A\ \forall b \in B: a \leq b) \Rightarrow (\sup A \leq \inf B)$.

6. Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin $A \cup B$ a $A \cap B$. „Vaše" tvrzení dokažte !